591 - نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=0$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{\sqrt{2+2u_n^2}}$

1] بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq u_n<1$

2] بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0<1-u_{n+1}<\frac{\sqrt{2}}{2}(1-u_n)$

3] بيّن أن (u_n) متقاربة وحدد نهايتها.

592 - لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $u_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}$ حيث العدد 2 يظهر n مرة في تعبير u_n

1] بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad \sqrt{2}\leq u_n\leq 2$

2] بيّن أن (u_n) متقاربة.

3] أ) بيّن أن $(\exists k\in]0;1[)\ ;\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 2-u_{n+1}\leq k(2-u_n)$

ب حدد نهاية (u_n)

593 - ادرس تقارب المتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ بحيث : $x_0>2$ و $x_{n+1}=\sqrt{\dfrac{(x_n-2)(x_n+5)}{2}}+1$

594 - لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $x_0=\frac{1}{4}$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\quad x_{n+1}=\dfrac{2\sqrt{x_n}}{1+x_n}$

1] بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0<x_n<1$

2] ادرس رتابة (x_n)

3] بيّن أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1-x_{n+1}\leq\frac{1}{2}(1-x_n)$

4] ادرس نهاية (x_n)

595 - لتكن $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بمايلي : $y_0=1$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\quad y_{n+1}=(1+y_n)\sqrt{y_n}$

1] بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad y_n\geq1$.

2] بيّن أن المتتالية (y_n) تزايدية.

3] بيّن أن $(\forall n\in\mathbb{N})\ y_n\geq n$ وحدّد نهاية (y_n).

596 - نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث :
$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ (\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}=u_n\sqrt{u_n}\end{cases}$$

1] بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0\leq u_n\leq\frac{1}{2}$ ثم ادرس رتابة (u_n).

2] بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1}\leq\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n+2}u_n$ واستنتج نهاية (u_n)

597 - لتكن (a_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $a_0=\frac{1}{2}$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_{n+1}=\sqrt{2a_n+a_n^2}$

1] بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0<a_n<2$

2] بيّن أن (a_n) متقاربة وحدد نهايتها.

598 - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بمايلي : $u_1=\frac{1}{2}$ و $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_{n+1}=\dfrac{u_n}{(1+\sqrt{u_n})^2}$

1] بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 0<u_n<1$

2] ادرس رتابة (u_n) واستنتج أنها متقاربة

3] • بيّن أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad 0<u_n<\frac{1}{n}$

• احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

599 - لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $u_0 = 4$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{(1+\sqrt{u_n})^2}$

1) أ) بيّن: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{3\sqrt{u_n}+1}{(1+\sqrt{u_n})^3}(u_n - 1)$

ب) بيّن أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 1 < u_n$

ج) بيّن أن (u_n) متتالية تناقصية.

2) لكل n من $\mathbb{N}$، نضع $a_n = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{u_n}}$.

- بيّن أن (a_n) هندسية
- احسب u_n بدلالة n وحدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

600 - لتكن (u_n) متتالية بحيث: $u_0 \in]1;+\infty[$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+\sqrt{u_n}}$

1) بيّن أن: $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_n > 1$

2) بين أن المتتالية (u_n) رتيبة واستنتج أنها متقاربة وحدد نهايتها.

601 - ادرس تقارب ونهاية المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي:

$u_0 = -\frac{3}{2}$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\quad u_{n+1} = u_n - 1 + \sqrt{u_n^2 + 3u_n + 3}$

602 - لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي: $x_0 = 0$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\quad x_{n+1} = \left(\sqrt{x_n} + \dfrac{1}{2^n}\right)^2$

1) بين أن المتتالية $(x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية

2) احسب x_n بدلالة n.

3) حدّد نهاية (x_n).

603 - نعتبر متتالية $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث: $a_0 > 0$ و $(\forall n\in\mathbb{N})\quad a_{n+1} = \dfrac{(n+1)a_n}{2n + a_n}$

ولكل n من $\mathbb{N}$، نضع $b_n = \dfrac{a_n}{n+a_n}$

1) بين أن المتتالية (b_n) هندسية.

2) احسب a_n بدلالة n.

3) أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n بحيث $5 \leq n$، فإن: $2^n > n^2$.

ب) استنتج أن: $(\forall n\geq 5)\quad 0 < a_n < \dfrac{1}{n-1}$ وحدد نهاية (a_n).

604 - لتكن $(x_n)_{n\geq 1}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي $x_1 = \frac{7}{3}$ ، $(\forall n\in\mathbb{N})\quad x_{n+1} = \dfrac{(n+1)(2n+3x_n)}{2n+x_n}$

ولكل n من $\mathbb{N}^*$، نضع $y_n = \dfrac{-2n + x_n}{n + x_n}$

1) بين أن المتتالية (y_n) هندسية.

2) حدد x_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$

605 - نعتبر المتتالية العددية $(a_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي:

$a_1 = \frac{1}{2}$ و $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad a_{n+1} = \dfrac{n^2 a_n}{2(1+n^2)}$

1) بيّن أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad a_n > 0$ ، أن (a_n) تناقصية.

2) أ) تحقق أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad (1+n)^2 < 2(1+n^2)$.

ب) بيّن أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad a_n < \dfrac{1}{n^2}$.

ج) حدّد نهاية (a_n).

552 - نعتبر متتالية عددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ بحيث $u_{n+1} = 5u_n + 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

وليكن x عدداً حقيقياً. لكل n من $\mathbb{N}$، نضع $X_n = u_n + x$

1] حدد x لكي تكون المتتالية (X_n) هندسية أساسها 5 ثم استنتج u_n بدلالة u_0 و n. هل يمكن اختيار u_0 لكي تكون (u_n) ثابتة ؟

2] نفترض أن $x = 1$ و $u_0 = 1$.

احسب، بدلالة n، المجموع: $S_n = X_0 + X_1 + \dots + X_n$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

ما أصغر عدد صحيح طبيعي n بحيث $S_n \geq 10^5$ ؟

553 - نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = 2u_n - 4 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

نضع، لكل n من $\mathbb{N}$، $v_n = u_n - \alpha$ حيث α عدد حقيقي

1] حدد العدد الحقيقي α لكي تكون (v_n) هندسية.

2] ادرس نهاية المتتالية (u_n)

554 - ليكن a و b عددين حقيقيين.

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = au_n + b \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1] بين أنه لأجل $a \neq 1$، فإن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي $v_n = u_n + \frac{b}{a-1}$ متتالية هندسية.

2] حدد علاقة بين a و b لكي تؤول المتتالية (u_n) إلى 3 واستنتج القيمة العددية للعدد v_0 والمرتبطة بها.

3] احسب u_n و $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ بدلالة a و n

555 - نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و $3u_{n+1} = 2u_n + n + 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ولتكن (v_n) المتتالية المعرفة بما يلي $v_n = u_n - n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

1] بين أن (v_n) متتالية هندسية.

2] استنتج u_n بدلالة n ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

556 - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفة بمايلي: $u_1 = 1$ و $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*)$

1] بين أن (u_n) تزايدية قطعاً وغير مكبورة.

2] استنتج نهاية (u_n).

3] احسب u_n بدلالة n.

4] لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية تزايدية قطعاً بحيث $x_n \in \mathbb{N} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

557 -

546 - لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+a^k}$ حيث $a > 1$.

بين أن (u_n) متقاربة (ليس المطلوب تحديد نهايتها)

547 - نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 9u_{n+1} = u_n + 8\sqrt{2+u_n}$ و $u_0 = 7$

1] بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 2$.

2] ادرس رتابة المتتالية (u_n) .

3] لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع : $v_n = \sqrt{2+u_n} - 2$

أ) بين أن (v_n) متتالية هندسية .

ب) احسب v_n ثم u_n بدلالة n

ج) ادرس تقارب (u_n) .

548 - نعتبر المتتاليتين العدديتين $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ المعرفتين بما يلي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \begin{cases} u_{n+1} - v_{n+1} = -1 + \frac{1}{n+1} \\ 3u_{n+1} - v_n = \frac{1-n}{n} \end{cases} \quad \text{و} \quad u_1 = v_1 = 1$$

1] بين أن (u_n) متتالية هندسية .

2] احسب u_n و v_n بدلالة n .

3] أ) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 3^n \geq \frac{n}{3}$

ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 1 - \frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$.

استنتج أن (v_n) متقاربة وحدد نهايتها .

549 - نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بما يلي :

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_{n+1} = \frac{n}{2n+2} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)}$ و $u_1 = \frac{5}{2}$

1] بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n < 3$

2] بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

3] نعتبر المتتالية (x_n) المعرفة بما يلي : $x_n = n(3-u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

أ) بين أن المتتالية (x_n) هندسية .

ب) حدد x_n بدلالة n واستنتج u_n بدلالة n .

ج) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة وحدد نهايتها .

550 - لتكن $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بما يلي : $u_0 = 2$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} = \frac{1}{n+3}\left(nu_n - \frac{1}{n+1}\right)$

ونضع ، لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = n(n+1)(n+2)u_n$

حدد $v_{n+1} - v_n$ بدلالة n ، استنتج u_n بدلالة n ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

551 - نعتبر المتتالية (u_n) بحيث : $u_0 = 1$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_{n+1} = \frac{u_n}{2+2^n u_n}$

1] بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; u_n > 0$ ؛ ادرس رتابة (u_n) واستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

2] لكل n من $\mathbb{N}$ ، نضع $v_n = \frac{2^{-n}}{u_n}$

أ) بين أن (v_n) متتالية حسابية ؛ ثم حدد u_n بدلالة n

ب) احسب نهاية (u_n)